Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Факультет доуниверситетской подготовки
и профессиональной ориентации

М.С. Сергеева-Некрасова, Г.Ф.Смирнова

З А Д А Ч И ПО ФИЗИКЕ

И МЕТОДИКИ ИХ РЕШЕНИЯ

Минск 2004

УДК 53 (075)
ББК 22.3 я 7
С32

Сергеева – Некрасова М.С.

С 32 Задачи по физике и методики их решения/ М.С.Сергеева-Некрасова, Г.Ф.Смирнова. - Мн.: БГУИР, 2004. – 32 с.:ил.

ISBN 985-444-591-7

Пособие предназначено для школьников выпускных классов и абитуриентов. В нем излагаются методики решения задач по физике с применением графического материала и векторных представлений, что существенно расширяет возможности успешного прохождения вступительных испытаний. Приведены также примеры решения задач по различным разделам физики с использованием графических и векторных представлений.

УДК 53 (075)
ББК 22.3 я 7

ISBN 985-444-591-7

Содержание

Введение

Настоящее пособие рассчитано на выпускников средних учебных заведений, готовящихся к поступлению в вузы. В пособии даны подробные методики решения типовых задач с помощью графических представлений, прослеживаются аналогии построения графиков и их использования для решения задач по различным разделам физики, рассматриваются разнообразные физические процессы, объединенные одними и теми же математическими зависимостями.

Как правило, выпускники средних школ, изучавшие физику на протяжении нескольких лет, не в состоянии проводить аналогии между различными физическими явлениями, не замечают математического однообразия в описании связей между физическими величинами. Графическое изображение этих зависимостей делает эти аналогии наглядными и понятными, что позволяет абитуриентам гораздо легче воспринимать курс физики, как нечто целостное и фундаментальное, а не совокупность отдельных явлений.

Не менее важным для абитуриентов является и умение использовать при решении задач по физике векторные представления. Предлагаемые в пособии методики существенно облегчают решение задач по различным темам курса физики, а также формируют правильное представление о сути физических процессов, в них рассматриваемых. Используя векторы в описании физических явлений, абитуриенты от отвлеченных математических понятий «векторная» или «скалярная» величина переходят к пониманию причинно-следственных связей между физическими величинами.

В последние годы одним из самых трудных испытаний для выпускников является централизованное тестирование, в материалах которого значительное место занимают графические задачи и представления о векторных величинах и преобразованиях векторов. Кроме этого, знание физических аналогий, наглядное представление о физических величинах и наиболее характерных зависимостей между ними существенно помогают абитуриенту при ответах на вопросы как тестирования, так и вступительных экзаменов.

Пособие, безусловно, поможет абитуриентам и школьникам расширить свои возможности на испытаниях при поступлении в вузы.

1. Решение задач с помощью графиков

1.1. Кинематика

Зависимости скорости, перемещения, пути от времени могут быть изображены графически.

1.1.1. Равномерное прямолинейное движение

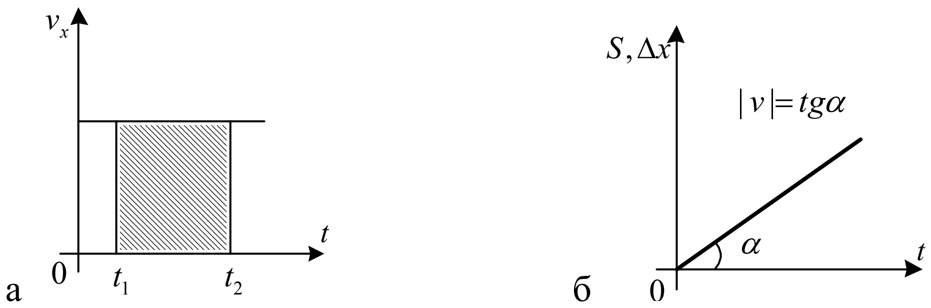


Рис. 1.1. (Частица движется в положительном направлении оси OX)

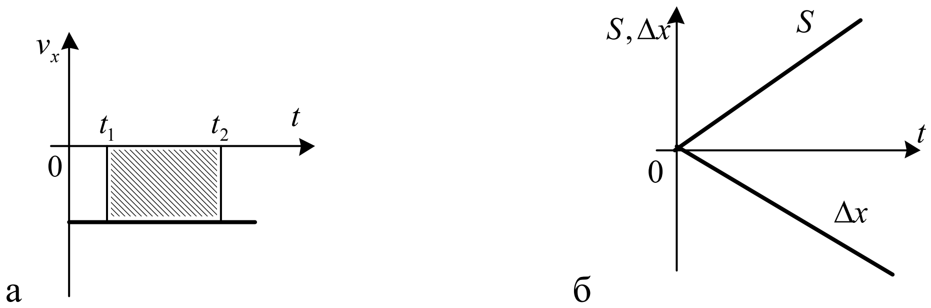


Рис. 1.2. (Частица движется в отрицательном направлении оси OX)

При движении в одном направлении путь и модуль перемещения совпадают и численно равны площади прямоугольника, ограниченного осью OX, значениями ординат в моменты времени t_1 и t_2, а также графиком зависимости $v(t)$ (рис. 1.1, 1.2, а).

1.1.2. Равноускоренное движение в одном направлении

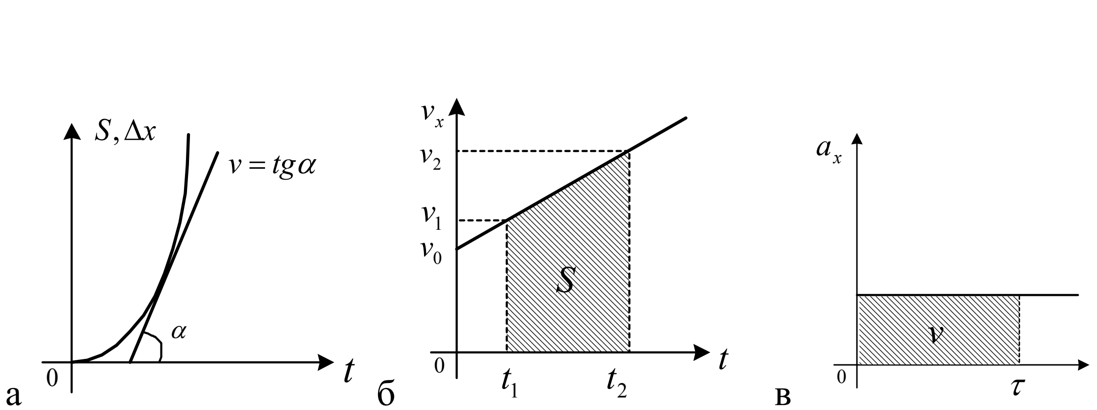


Рис. 1.3

1.1.3. Равнопеременное движение с изменением направления движения

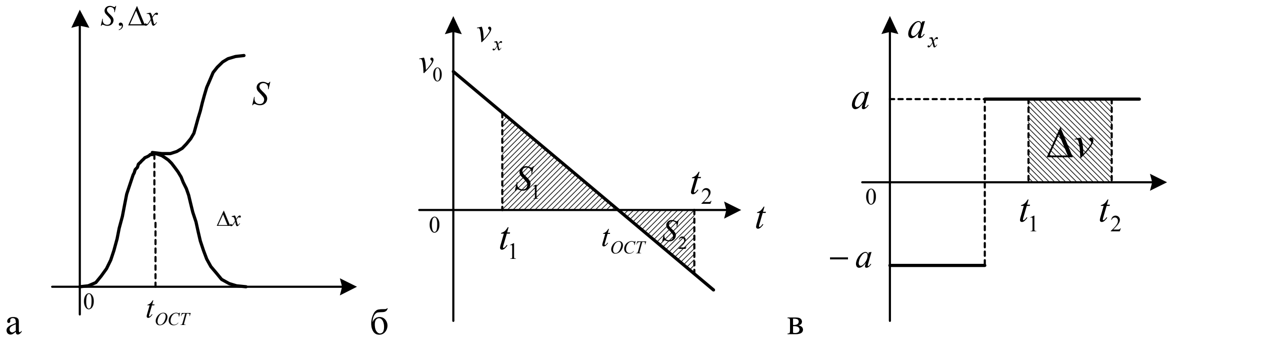


Рис. 1.4

В случае, когда скорость меняет свое направление, путь равен сумме площадей заштрихованных на рис. 1.4, б треугольников, а перемещение определяется алгебраической суммой тех же площадей, причем площадь треугольника, лежащего под осью t, следует брать со знаком минус:

$S_{полн} = S_1 + S_2$, $\Delta x = S_1 - S_2$.

1.1.4. Движение под действием силы тяжести

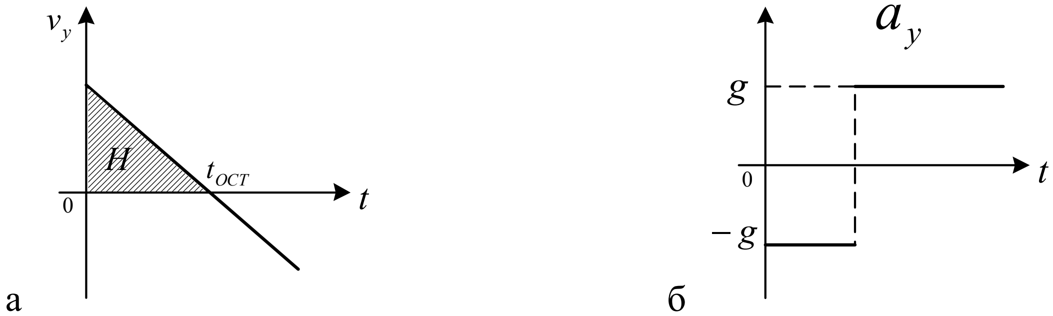


Рис. 1.5

Задача 1.1. Тело движется равноускоренно из состояния покоя. Во сколько раз путь, пройденный телом за одиннадцатую секунду движения, больше пути, пройденного за третью секунду?

Решение. Строим график зависимости $v(t)$, на котором отмечаем указанные промежутки времени и заштриховываем площади, соответствующие пройденным путям (рис. 1.6). Используя формулу $v = at$, находим значения скоростей в начале и конце каждого промежутка времени и также отмечаем их значения на графике.

Пройденные пути находим как площадь заштрихованных трапеций:

$$S_3 = \frac{1}{2}(3a + 2a)\cdot 1 = \frac{5}{2}a,$$

$$S_{11} = \frac{1}{2}(10a + 11a)\cdot 1 = \frac{21}{2}a.$$

Искомая величина равна

$$\frac{S_{11}}{S_3} = \frac{21}{5} = 4{,}2.$$

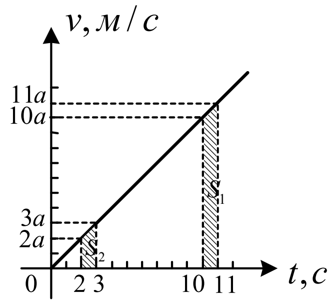


Рис. 1.6

Задача 1.2. Одну треть всего времени тело движется со скоростью 60 км/ч, вторую треть – со скоростью 30 км/ч, а остальное время тело стоит. Найти среднюю скорость движения тела.

Решение. Строим график зависимости $v(t)$. Пути, пройденные телом за интервалы $\tau/3$, равны площадям заштрихованных на рис. 1.7 прямоугольников:

$S_1 = 60 \cdot \frac{\tau}{3}$; $S_2 = 30 \cdot \frac{\tau}{3}$; $S_3 = 0$.

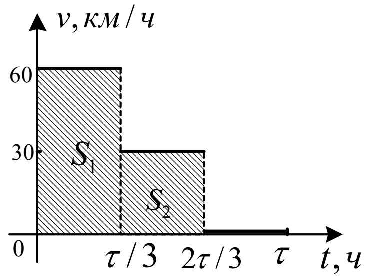


Рис. 1.7

Среднюю скорость движения находим по формуле

$$\langle v \rangle = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{\tau} = 60 \cdot \frac{1}{3} + 30 \cdot \frac{1}{3} = 30 \text{ (км/ч)}.$$

Задача 1.3. Частица движется вдоль оси OX, причем ее скорость меняется по закону $v_x = (14 - 3t)$ м/с. Найти модуль перемещения в промежутке времени от 1 с до 3 с.

Решение. Построим график зависимости $v_x(t)$ (рис. 1.8). На графике отметим значение начальной скорости и момент остановки частицы – точку пересечения прямой $v_x(t)$ и оси t. Найдем значение $t_{ост}$, чтобы выяснить, не изменила ли частица направление своего движения за указанный промежуток времени. В момент остановки $v(t_{ост}) = 0$,

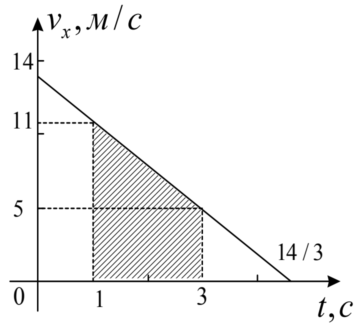


Рис.1.8

$14 - 3t_{ост} = 0$.

Следовательно, $t_{ост} = 14/3$ с.

Так как частица не меняет направление своего движения за данный промежуток времени, то модуль искомого перемещения определится площадью заштрихованной на рис. 1.8 трапеции. Для расчета площади трапеции найдем скорости частицы в начальный и конечный моменты интересующего нас промежутка времени:

$v_1 = 14 - 3 \cdot 1 = 11$ (м/с), $v_3 = 14 - 3 \cdot 3 = 5$ (м/с).

Искомое перемещение равно

$$\Delta x = \frac{1}{2}(11 + 5) \cdot (3 - 1) = 16 \text{ (м)}.$$

Задача 1.4. С аэростата, поднимающегося вверх со скоростью 5 м/с, выпал предмет. Найти путь, пройденный предметом относительно Земли за 2 с после выпадения предмета ($g = 10 м/с^2$).

Решение. Воспользуемся графиком зависимости $v_y(t)$ (рис. 1.9). На графике отметим значение начальной скорости и момент остановки выпавшего

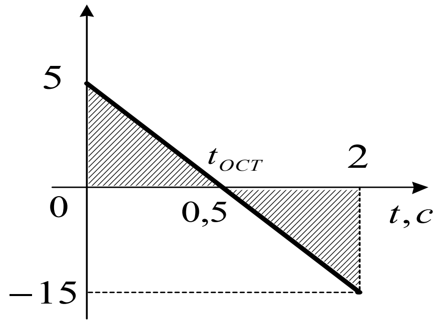


Рис.1.9

предмета, после которого предмет меняет направление своего движения и начинает ускоренно падать вниз, а также время движения тела.

Момент остановки найдем из условия

$v_y(t_{ocm}) = 0$, $v_0 - gt_{ocm} = 0$,

$5 - 10t_{ocm} = 0$, $t_{ocm} = 0{,}5$ с.

Рассчитаем также модуль конечной скорости предмета.

$|v_k| = |v_0 - gt| = |5 - 10 \cdot 2| = 15$ (м/с).

Путь, пройденный телом за указанное время, равен сумме площадей заштрихованных на рис. 1.9 треугольников:

$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} 5 \cdot 0{,}5 + \frac{1}{2} 15 \cdot 1{,}5 = 12{,}5$ (м).

Задача 1.5. Камень брошен с начальной скоростью 20 м/с под углом 30^o к горизонту с высоты 15 м. На каком максимальном расстоянии от основания башни он упадет на землю?

Решение. Воспользуемся для решения задачи графиком зависимостей $v_x(t)$, $v_y(t)$ (рис. 1.10 б, в). На графиках отметим:

а) начальные скорости

$v_{0.x} = v_0 \cos\alpha = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ (м/с),

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$ (м/с);

б) момент остановки

$v_{0y} - gt_{ocm} = 0$, $10 - 10t_{ocm} = 0$, $t_{ocm} = 1$с.

Заштрихуем искомую площадь (рис. 1.10, б), для расчета которой необходимо знать время падения тела.

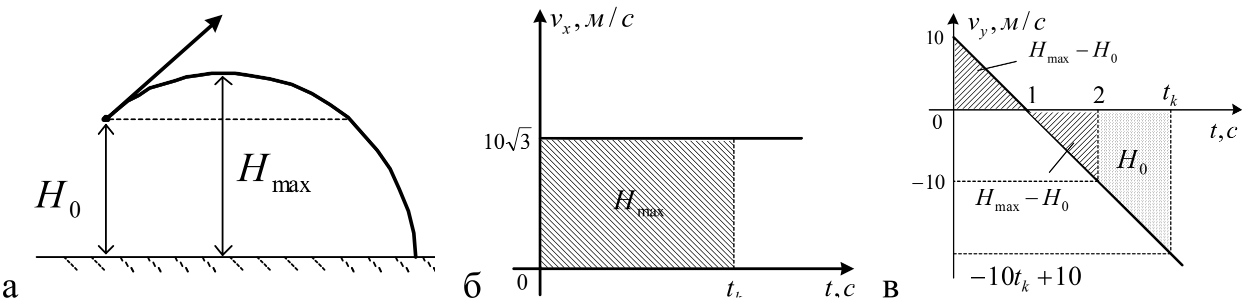


Рис 1.10

Обратимся к графику $v_y(t)$ (рис. 1.10, в). Площадь первого треугольника соответствует пути, пройденному камнем при движении вверх от H_0 до H_{max} (рис. 1.10, а). Площадь второго треугольника соответствует пути, пройденному при падении вниз от H_{max} до H_0 (рис. 1.10, а). Площадь же трапеции соответствует высоте падения $H_0 = 15$ м.

Площади треугольников равны, так как соответствуют одному и тому же пути. Следовательно, камень окажется на высоте H_0 через 2 с и будет иметь скорость 10 м/с. Конечную скорость камня выразим с помощью формулы

$v_{yk} = 10 - 10t_k$.

Запишем формулу для площади трапеции и определим t_k:

$S = \frac{1}{2}(10 + |10 - 10t_k|)(t_k - 2)$, $15 = \frac{1}{2}(10 - 10 + 10t_k)(t_k - 2)$,

$t_k^2 - 2t_k - 3 = 0$, $t_k = 1 \pm \sqrt{1+3}$, $t_k = 3$ (с).

Из графика зависимости $v_x(t)$ (рис. 1.10, б) находим

$I_{\max} = 10\sqrt{3} \cdot 3 = 30\sqrt{3}$ (м).

1.1.5 Движение по окружности

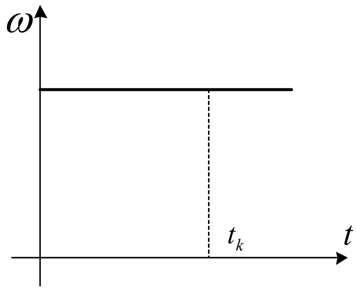


Рис.1.11

(Равномерное вращение)

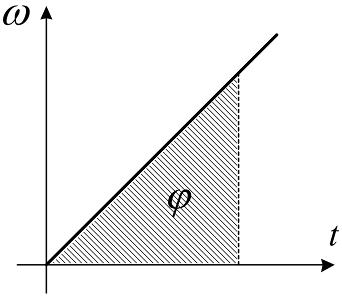


Рис.1.12

(Равноускоренное вращение)

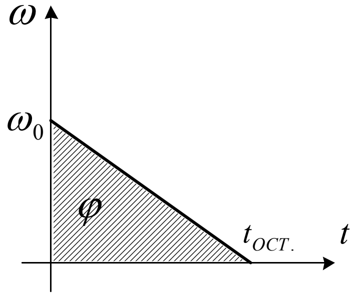


Рис.1.13

(Равнозамедленное вращение)

Задача 1.6. Гирька описывает окружность радиусом 5 см с постоянным тангенциальным (касательным) ускорением $5 см/с^2$. Найти линейную и угловую скорость гирьки к концу пятого оборота.

Решение. Воспользуемся графиком зависимости $\omega(t)$. Площадь заштрихованного треугольника на рис. 1.14 и есть угол поворота, равный $5 \cdot 2\pi = 10\pi$. С другой стороны, площадь треугольника равна $1/2\omega_k t_k$.

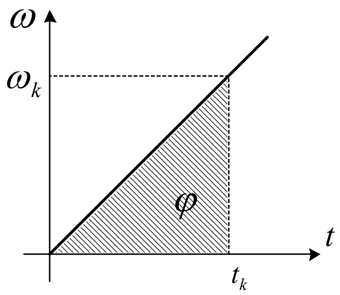


Рис.1.14

Таким образом,

$10\pi = \frac{1}{2}\omega_k t_k$.

Так как

$\omega_k = \varepsilon t_k = \frac{a}{R}t_k$,

то

$10\pi = \frac{1}{2}t_k^2$, $t_k = \sqrt{20\pi}$.

Искомые величины равны

$\omega_k = \frac{a}{R}t_k = \sqrt{20\pi}$ (рад/с), $v_k = \omega_k R = 5\sqrt{20\pi} \cdot 10^{-2}$ (м/с).

Задача 1.7. Вал начинает равноускоренное вращение из состояния покоя и в первые 10 с совершает 50 оборотов. Найти угловое ускорение вала.

Решение. Изобразим графически зависимость $\omega(t)$. На осях отметим время вращения и конечную угловую скорость, которая равна

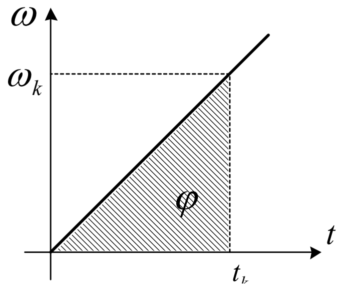


Рис.1.15

$\omega_k = \varepsilon t = 10\varepsilon$.

Площадь заштрихованного на рис. 1.15 треугольника соответствует полному углу поворота за 10 с. Следовательно,

$2\pi N = \frac{1}{2} \cdot 10\varepsilon \cdot 10$, $100\pi = 50\varepsilon$.

Отсюда

$\varepsilon = 6{,}28(рад/с^2)$.

Задача 1.8. Тело начинает вращение с начальной угловой скоростью 12,56 рад/с и угловым ускорением $6{,}28 рад/с^2$. Сколько оборотов сделает тело до полной остановки?

Решение. Воспользуемся графической зависимостью $\omega(t)$. На осях отметим ω_0 и $t_{ост}$ (рис. 1.16).

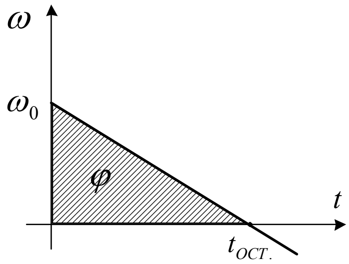


Рис.1.16

Время остановки находим из условия

$0 = \omega_0 - \varepsilon t_{ост}$, $0 = 12{,}56 - 6{,}28 t_{ост}$,

$t_{ост} = 2с$.

Так как угол равен заштрихованной на рис. 1.16 площади, то

$\varphi = \frac{1}{2} \cdot 12{,}56 \cdot 2 = 12{,}56(рад)$.

Число оборотов равно

$N = \frac{\varphi}{2\pi} = 2$.

Задача 1.9. На барабан намотана нить, к концу которой привязан груз. Предоставленный самому себе груз опускается с ускорением $5{,}6 м/с^2$. Найти ускорение точек, лежащих на ободе барабана, при угле поворота в $10 рад$.

Решение. На графике зависимости $\omega(t)$ (рис. 1.17) отмечаем конечный момент времени и конечную угловую скорость, значение которой находим с помощью формулы

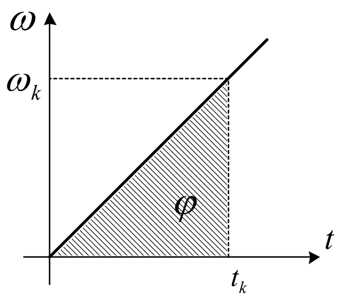


Рис.1.17

$\omega_k = \varepsilon t_k = \frac{a}{R} t_k = \frac{5{,}6}{R} t_k$.

Заштрихованная на рис. 1.17 площадь соответствует углу поворота, т.е.

$$10=\frac{5{,}6\cdot t_k^2}{R}\cdot 0{,}5\,.$$

Выражаем

$$t_k^2=\frac{20}{5{,}6}R$$

и находим нормальное ускорение

$$a_n=\omega_k^2 R=\varepsilon^2 t_k^2 R=5{,}6\cdot 20=112(м/с^2)\,.$$

Полное ускорение точек обода барабана равно

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{112^2+5{,}6^2}=112(м/с^2)\,.$$

Задача 1.10. Маховое колесо, вращающееся с частотой $240 об/мин$, останавливается в течение промежутка времени $0{,}5 мин.$ Найти число оборотов, сделанных колесом до полной остановки.

Решение. Строим график зависимости $\omega(t)$ (рис. 1.18). На осях отмечаем момент остановки и начальную угловую скорость, которую рассчитываем по формуле

$$\omega_0=2\pi\, n=2\pi\frac{240}{60}=8\pi(рад/с)\,.$$

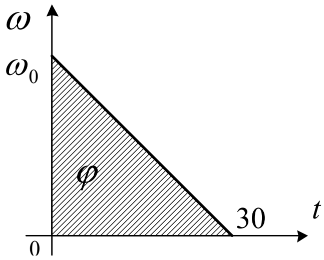


Рис. 1.18

Площадь заштрихованного на рис. 1.18 треугольника определяет полный угол поворота колеса:

$$\varphi=2\pi\, N=\frac{1}{2}\cdot 8\pi\cdot 30\,,$$

где N - число оборотов, сделанных колесом до остановки.

Следовательно,

$N=60$ оборотов.

1.2. Работа переменной силы

Работа, совершаемая переменной силой, может быть определена из графика зависимости $F_S(S)$ (F_S - проекция силы на направление перемещения, S - пройденный путь) как площадь фигуры, ограниченной кривой $F_S(S)$ и ординатами $F_S(S_1)$ и $F_S(S_2)$ (рис. 1.19).

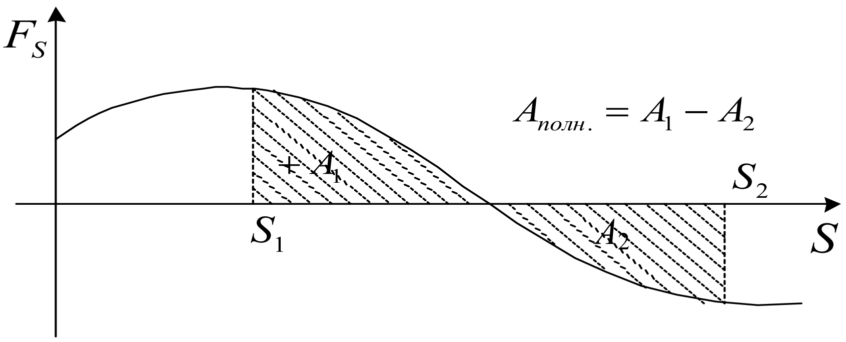


Рис.1.19
(Переменная сила)

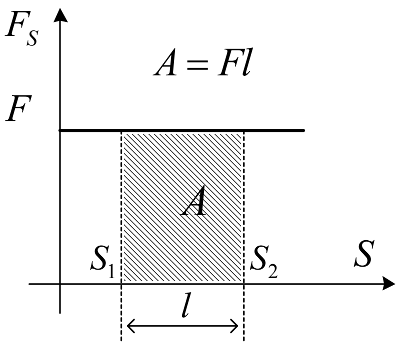


Рис.1.20
(Постоянная сила)

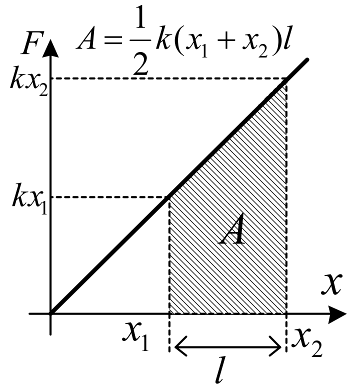


Рис.1.21
(Упругая сила)

Задача 1.11. Какую работу необходимо совершить, чтобы пружину, сжатую до $0{,}01 м$, дополнительно сжать еще на $0{,}02 м$? Коэффициент упругости пружины $10^5\, Н/м$.

Решение. Работа совершается против силы упругости, которая является переменной силой: $F = kx$.

Начертим график зависимости $F(x)$ (рис. 1.22), на котором отметим значения абсолютного сжатия пружины в начальный и конечный моменты времени, а также значения силы, сжимающей пружину в эти моменты времени. Искомая работа равна площади заштрихованной на рис. 1.22 трапеции:

$A = \frac{1}{2}(10^3 + 3 \cdot 10^3) \cdot 0{,}02 = 40 (Дж)$.

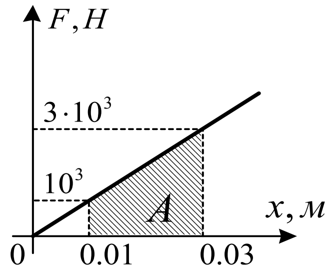


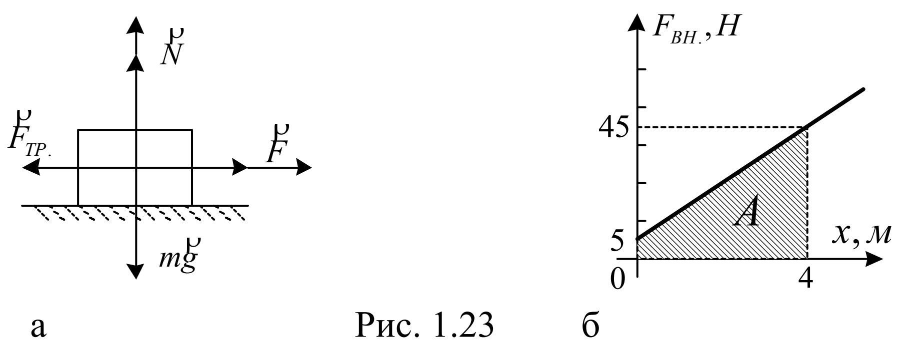
Рис.1.22

Задача 1.12. Тело массой 50 кг движется прямолинейно и равномерно по поверхности, коэффициент трения которой меняется по закону $\beta = 0{,}01 + 0{,}02x$ (х – расстояние, пройденное телом, в метрах). Найти работу внешней силы, совершенную при прохождении 4 м пути.

Решение. Найдем зависимость внешней силы от пройденного пути. Для этого запишем второй закон Ньютона:

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{тр}$, $\vec{a} = \vec{0}$.

б



а Рис. 1.23 б

Спроектируем уравнение на оси координат (рис. 1.23, а):

$$\begin{cases} 0 = F - F_{mp}, F = F_{mp} \\ 0 = N - mg, N = mg. \end{cases}$$

Находим

$F = \mu mg = (0{,}01 + 0{,}02x)mg = 5 + 10x$.

Строим график зависимости $F(x)$ (рис. 1.23, б), на котором отмечаем пройденный путь, начальное и конечное значения силы. Работу находим как площадь заштрихованной трапеции:

$$A = \frac{1}{2}(5 + 45) \cdot 4 = 100(Дж).$$

Задача 1.13. Из колодца глубиной 20м достают воду ведром. Внизу ведро заполняется водой до краев. Из-за течи при подъеме ведра часть воды выливается в колодец обратно. Считая, что подъем производится равномерно, а скорость вытекания воды постоянна, определить работу по подъему ведра, если к концу подъема в ведре остается 2/3 первоначальной массы воды. Масса пустого ведра 2 кг, его объем 15л.

Решение. Работа совершается против силы тяжести, которая меняется из-за вытекания воды из ведра. Покажем, что зависимость силы тяжести от высоты подъема ведра имеет лишь линейный характер. Для этого найдем закон изменения массы воды в ведре:

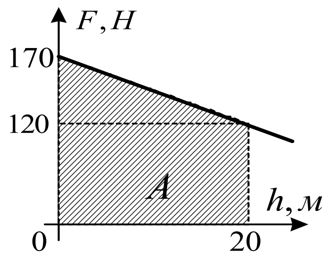


Рис. 1.24

$$m = m_0 - \frac{\Delta m}{\Delta t} \cdot t,$$

где $\Delta m / \Delta t$ - скорость вытекания воды, t - время, за которое ведро поднимается на высоту h.

Учитывая, что

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{m_0 - \frac{2}{3}m_0}{t_{подъема}} = \frac{m_0}{3H} \cdot v \text{ (т.к. } t_{подъема} = \frac{H}{v}\text{)},$$

где v - скорость подъема ведра, имеем

$$m = m_0 - \frac{1}{3}m_0\frac{h}{H} \text{ (т.к. } t = \frac{h}{v}\text{)}.$$

Таким образом, сила, с которой тянут ведро, равна

$$F = m_{ведра}g + (m_0 - \frac{1}{3}m_0\frac{h}{H})g, m_0 g = \rho g V.$$

Изобразим зависимость $F(h)$ на рис. 1.24. На осях отметим конечную высоту подъема, начальное и конечное значение силы F.

$F(0) = m_{ведра}g + m_0 g = 2 \cdot 10 + 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 170(H)$;

$$F(H) = m_{ведра}g + \frac{2}{3}m_0 g = 2 \cdot 10 + \frac{2}{3}10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \cdot 10 = 120(H).$$

Искомая работа равна площади заштрихованной на рис. 1.24 трапеции:

$$A = (2m_{ведра}g + \frac{5}{3}m_0 g)\cdot\frac{H}{2} = \frac{170+120}{2}\cdot 20 = 2{,}9(кДж).$$

Задача 1.14. В водоеме укреплена вертикальная труба с поршнем так, что нижний ее конец погружен в воду. Поршень, лежащий вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту 15 м (рис. 1.25, а). Какую работу пришлось при этом совершить? Площадь поршня $1\,дм^2$. Атмосферное давление $10^5\,Па$. Массой поршня пренебречь.

Решение. Найдем высоту, на которую поднимается вода в трубе, из условия: столб воды должен уравновесить атмосферное давление.

$$\rho g H_0 = p_a, H_0 = \frac{p_a}{pg} = \frac{10^5}{10\cdot 10^3} = 10(м).$$

Следовательно, до высоты $H_0 = 10м$ работа совершается против переменной силы тяжести поднимающегося вслед за поршнем водяного столба:

$$F_1 = \rho g h S.$$

На последних 5 м подъема работа совершается только против сил атмосферного давления:

$$F_2 = p_à S.$$

График зависимости $F(h)$ имеет вид (рис. 1.25, б).

а Рис. 1.25 б

Работа по поднятию поршня определяется площадью заштрихованной на рис. 1.25, б фигуры:

$$A = \frac{\rho g h_0^2 S}{2} + p_a S(H - H_0) = \frac{10^3\cdot 10\cdot 10^2\cdot 10^{-2}}{2} + 10^5\cdot 10^{-2}\cdot 5 = 10^4(Дж).$$

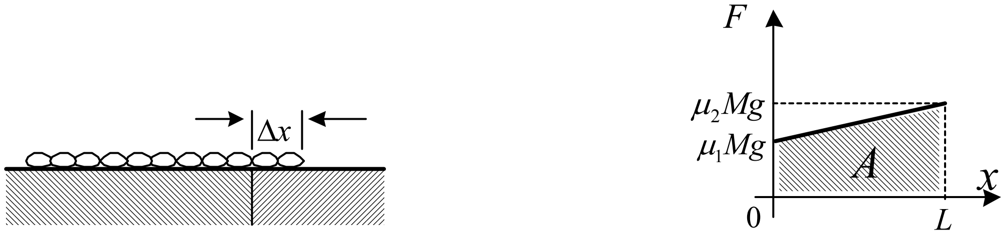
Задача 1.15. Цепь массой M и длиной L лежит у границы двух соприкасающихся полуплоскостей из различных материалов (рис. 1.26, а). Какую работу надо совершить, чтобы передвинуть цепь на вторую полуплоскость? Коэффициенты трения полуплоскостей с цепью соответственно равны μ_1, μ_2.

Решение. Работа совершается против силы трения, которая в данном случае является переменной:

$$F = \mu_1\frac{M}{L}(l - x)g + \mu_2\frac{M}{L}xg = \mu_1 Mg - \frac{Mg}{L}(\mu_1 - \mu_2)x,$$

где x - расстояние от границы раздела полуплоскостей до начала цепи. График зависимости силы трения от перемещения цепи изображен на рис. 1.26, б. Со-

вершаемая работа определяется площадью заштрихованной на рис. 1.26, б трапеции:
$$A = \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)MgL\,.$$



а Рис.1.26 б

1.3. Гармонические колебания

Графически зависимости от времени обобщенной координаты, скорости колебаний и ускорения представлены на рис. 1.27 а, б, в.

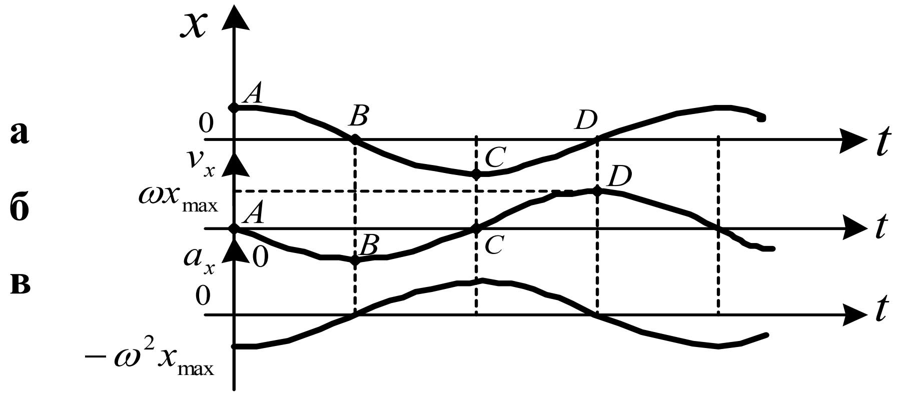


Рис.1.27

Задача 1.16. Тело совершает гармонические колебания с частотой 12 Гц и амплитудой 0,2 м. Какое минимальное расстояние пройдет тело при изменении скорости от нуля до максимального значения?

Решение. На графике зависимости $v_x(t)$ отмечаем два ближайших момента времени, соответствующих значениям $|v_x| = 0$ и $|v_x| = v_{\max}$. Это точки A и B (рис. 1.27, б). На графике $x(t)$ (рис. 1.27, а) этим моментам времени соответствуют координаты $x_A = a$ и $x_B = 0$. Искомое расстояние
$l = | x_A - x_B | = x_{\max} = 0{,}2(м)$.

Задача 1.17. Тело массой 0,2 кг совершает гармонические колебания с амплитудой 12 см и частотой 8 Гц. Насколько изменится кинетическая энергия тела за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на 3,14 рад?

Решение. На графике зависимости $x(t)$ (рис. 1.27, а) отметим две точки, имеющие сдвиг фаз 3,14 рад (π). Например, точки B и D(или A и C). Из графика зависимости $v_x(t)$ (рис. 1.27, б) видно, что этим точкам соответствует одно и то же значение скорости $v_B = v_D$.

Следовательно,

$$K_B = K_D = \frac{mv^2}{2}, \ \Delta K = 0.$$

Задача 1.18. Во сколько раз изменяется потенциальная энергия колеблющейся вдоль оси OX частицы массой 0,2 кг за время, в течение которого точка проходит расстояние между двумя последовательными остановками?

Решение. В момент остановки скорость частицы обращается в нуль. На графике зависимости $v_x(t)$ (рис. 1.27, б) двум последовательным остановкам соответствуют точки А и С. Из графика зависимости $x(t)$ (рис. 1.27, а) ясно, что в моменты времени t_A и t_C частица максимально отклоняется от положения равновесия, т. е. $|x_A| = |x_C| = x_{\max}$.

Так как

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}, \text{ то } \Pi_A = \Pi_C.$$

Следовательно,

$$\frac{\Pi_A}{\Pi_C} = 1.$$

Задача 1.19. Частица, совершающая гармонические колебания вдоль оси OX, проходит путь, равный 12 м, за три полных колебания. Найти амплитуду колебаний.

Решение. Из графика зависимости $x(t)$ (рис. 1.28) ясно, что в общем случае расстояние, пройденное колеблющейся частицей, может быть рассчитано по формуле

$$L = |x_{\max 1} - x_{\max 2}| \cdot n + |x_{\max 1 или 2} - x_t|,$$

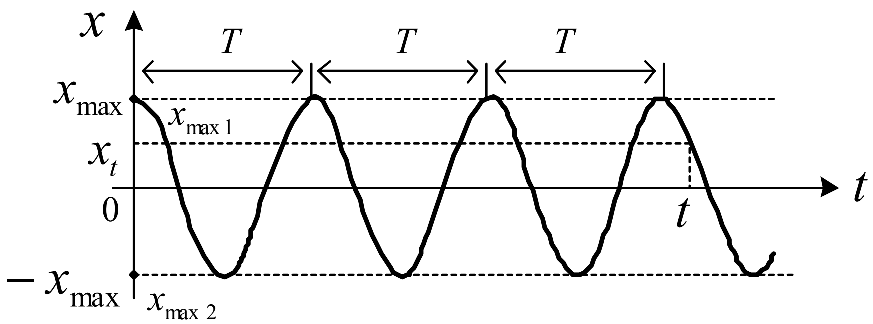


Рис.1.28

где $x_{\max 1}$, $x_{\max 2}$ - координаты, соответствующие максимальным отклонениям от положения равновесия; x_t - координата частицы в момент времени t; n - число отклонений от $x_{\max 1}$ до $x_{\max 2}$ (число полупериодов).

В данном случае $n = 6$, так как число полупериодов равно удвоенному числу полных колебаний.

Частица совершила три полных колебания, поэтому $x_t = x_{\max 1}$ или $x_{\max 2}$.

Следовательно,

$L = \left| x_{\max 1} - x_{\max 2} \right| \cdot 6 = \left| x_{\max} - (-x_{\max}) \right| \cdot 6 = 12 x_{\max}$.

Отсюда $x_{\max} = \frac{L}{12} = \frac{12}{12} = 1(м)$.

Задача 1.20. Какой путь проходит частица, колеблющаяся вдоль оси OX, за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на 14,5π? Амплитуда колебаний равна 0,4 м.

Решение. Так как за один период фаза колебаний изменяется на 2π, то время, в течение которого совершаются колебания, равно

$t = \frac{14{,}5\pi}{2\pi} \cdot T = 7T + \frac{T}{4}$.

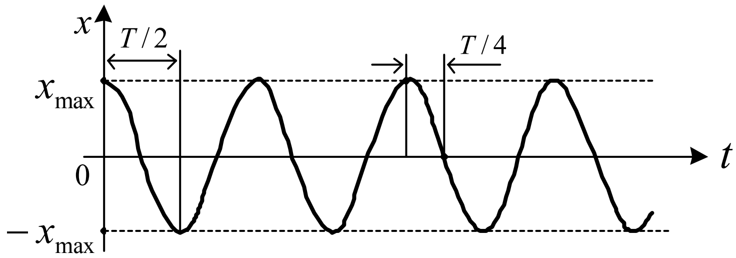


Рис.1.29

За промежуток времени 7T частица совершает 7 полных колебаний, следовательно, целое число полупериодов равно 14($n = 7 \cdot 2 = 14$). Из рис. 1.29 определяем x_t к моменту времени 0,25T:

$x_t = 0$.

Следовательно, искомая величина равна

$L = 14\left| x_{\max} - (-x_{\max}) \right| + \left| x_{\max} - 0 \right| = 28 x_{\max} + x_{\max} = 29 x_{\max} = 11{,}6(м)$.

1.4. Термодинамика газов

Работа, совершаемая газом, имеет наглядный графический смысл. Она равна площади, ограниченной графиком зависимости $p(V)$, соответствующими ординатами и осью V (рис. 1.30, а). Полезная работа при циклическом процессе изображается площадью, ограниченной графиком цикла, т.е. кривыми расширения и сжатия (рис. 1.30, б).

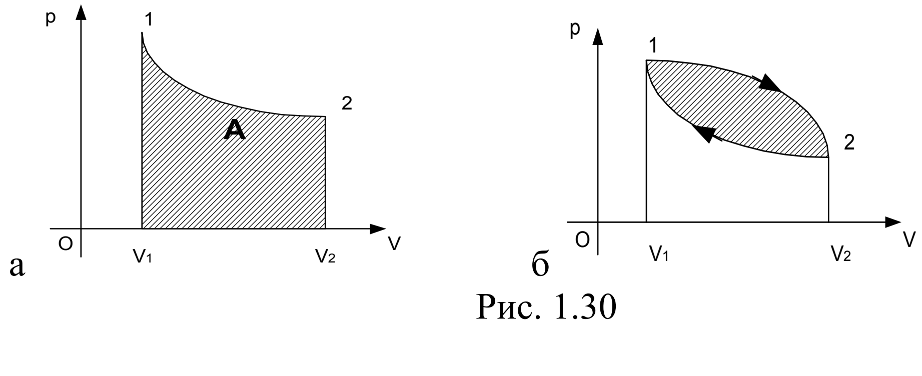


Рис. 1.30

Задача 1.21. В координатах (p,V) график процесса в одноатомном идеальном газе имеет вид прямых, соединяющих точки (200 кПа, 5 л); (200 кПа, 8л) и (400 кПа, 5л). Найти работу, совершенную газом за цикл.

Решение. Строим график зависимости $p(V)$ (рис 1.31). Работа, совершенная газом за цикл, равна площади заштрихованного на рис. 1.31 треугольника:

$$A = \frac{1}{2}(8-5)(400-200)\cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 300(\text{Дж}).$$

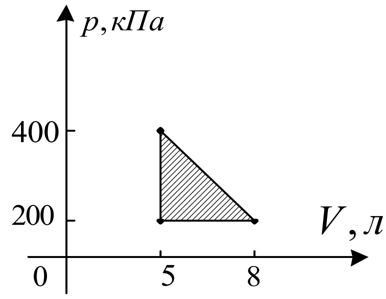


Рис. 1.31

Задача 1.22. Моль гелия, находящегося при температуре 300 К, изохорически охлаждается так, что его давление падает в 3 раза. Затем газ изобарически расширяют до установления первоначальной температуры. Найти работу, совершенную газом.

Решение. Изобразим процесс в координатах p,V (рис. 1.32). Полная работа, совершенная газом, будет равна площади заштрихованного прямоугольника:

$$A = A_{23} = p_1(V_1 - V_0).$$

Воспользуемся уравнением Менделеева – Клапейрона для точек 2 и 3:

$$p_1V_0 = RT_1, p_1V_1 = RT_0.$$

Таким образом,

$$A = R(T_0 - T_1).$$

Температуру T_1 найдем из закона Шарля:

$$\frac{p_0}{T_0} = \frac{p_0}{3T_1}, \quad T_1 = \frac{T_0}{3}.$$

Окончательно

$$A = \frac{2}{3}RT_0 = \frac{2}{3}\cdot 8{,}3\cdot 300 = 1660(\text{Дж}).$$

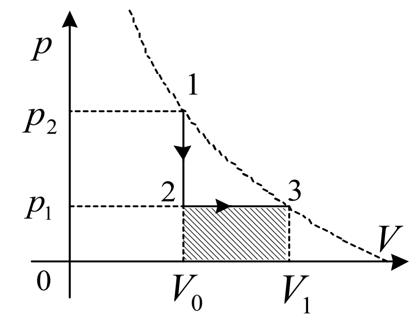


Рис. 1.32

Задача 1.23. Два моля идеального одноатомного газа нагревают так, что его температура меняется пропорционально квадрату давления $T = \beta p^2$. Найти работу, совершенную газом при нагревании его на 10 К.

Решение. Найдем зависимость $p(V)$ с помощью уравнения Менделеева – Клапейрона:

$pV = \nu RT$, $pV = \nu R\beta p^2$, $V = \alpha p$, где $\alpha = \nu R\beta$.

Построим график зависимости $p(V)$ (рис. 1.33) и отметим на нем значения давления

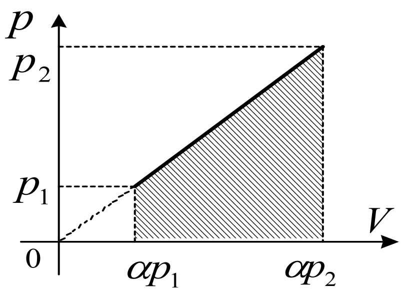


Рис.1.33

и объема, соответствующие начальной и конечной температуре. Работа, совершенная газом, определится площадью трапеции, ограниченной прямой $p = V/\alpha$, ординатами p_1 и p_2, а также осью V:

$$A_{полн} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(\alpha\, p_2 - \alpha\, p_1) = \frac{1}{2}\alpha(p_2^2 - p_1^2) = \frac{1}{2}\alpha(\frac{T_2}{\beta} - \frac{T_1}{\beta}) = \frac{1}{2}\frac{\alpha}{\beta}\Delta T = \frac{1}{2}\nu R\Delta T =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 8{,}3\cdot 10 = 83(Дж).$$

Задача 1.24. Моль гелия совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Известно, что $p_{\max} = 2p_{\min}$, $V_{\max} = 1{,}5V_{\min}$. Найти КПД теплового двигателя, работающего на этом цикле.

Решение. Изобразим цикл графически в координатах p,V (рис. 1.34). Найдем работу, совершаемую за цикл, как площадь заштрихованного прямоугольника:

$A = (1{,}5V_0 - V_0)(2p_0 - p_0) = 0{,}5 p_0 V_0$.

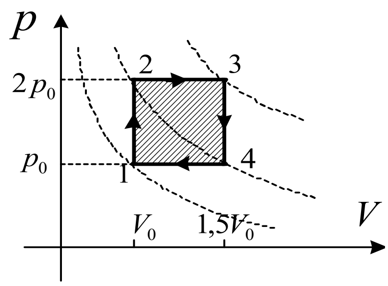


Рис.1.34

В ходе процессов 1 – 2 и 2 – 3 газ нагревается (см. изотермы на рис.1.34), а в ходе процессов 3 – 4 и 4 – 1 охлаждается.

Следовательно, затраченное на нагревание газа количество теплоты равно

$Q_{затр.} = Q_{12} + Q_{23}$.

Согласно 1-му началу термодинамики

$Q_{12} = A_{12} + \Delta V_{12} = \Delta V_{12}$,

$Q_{23} = A_{23} + \Delta V_{23} = 2p_0 \cdot 0{,}5V_0 + \Delta V_{23} = p_0 V_0 + \Delta V_{23}$.

Найдем изменение внутренней энергии, воспользовавшись уравнением Менделеева – Клапейрона:

$$\Delta V_{12} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{12} = \frac{3}{2}\nu V\Delta p_{12} = \frac{3}{2}\nu V_0 p_0 = 1{,}5V_0 p_0 \quad (V = const),$$

$$\Delta V_{23} = \frac{3}{2}\nu R\Delta T_{23} = \frac{3}{2}\nu p\Delta V_{23} = \frac{3}{2}\nu 0{,}5V_0 \cdot 2p_0 = 1{,}5V_0 p_0 \quad (p = const).$$

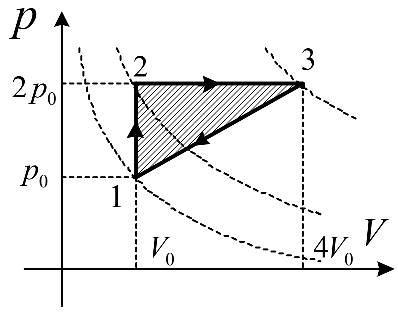
Таким образом,

$Q_{затр.} = 1{,}5 p_0 V_0 + p_0 V_0 + 1{,}5 p_0 V_0 = 4 p_0 V_0$.

Следовательно,

$$\eta = \frac{A_{полн}}{Q_{затр}}\cdot 100\% = \frac{0{,}5 p_0 V_0}{4 p_0 V_0}\cdot 100\% = 12{,}5\%$$

Задача 1.25. Тепловая машина, рабочим телом в которой является одноатомный идеальный газ, совершает цикл, изображенный на рис. 1.35. Найти КПД тепловой машины.



Решение. Коэффициент полезного действия тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A_{пол}}{Q_{затр}}\cdot 100\%$$

Рис. 1.35

Полезная работа $A_{пол}$ определяется площадью заштрихованного треугольника:

$$A_{пол} = \frac{1}{2}(2p_0 - p_0)(4V_0 - V_0) = 1{,}5p_0V_0 .$$

Количество теплоты $Q_{затр}$, полученное рабочим телом от нагревателя, оценим, используя 1-е начало термодинамики и закон Менделеева – Клапейрона:

$$Q_{затр} = Q_{12} + Q_{23} = A_{12} + \Delta V_{12} + A_{23} + \Delta V_{23},$$

$$A_{12} = 0,\ A_{23} = 2p_0 \cdot 3V_0 = 6p_0V_0,$$

$$\Delta V_{12} = \frac{3}{2}R\Delta T_{12} = \frac{3}{2}p_0V_0,$$

$$\Delta V_{23} = \frac{3}{2}R\Delta T_{23} = \frac{3}{2}\cdot 2p_0 \cdot 3V_0 = 9p_0V_0 .$$

Таким образом,

$$Q_{затр} = 6p_0V_0 + 1{,}5p_0V_0 + 9p_0V_0 = 16{,}5p_0V_0 .$$

Окончательно

$$\eta = \frac{1{,}5p_0V_0}{16{,}5p_0V_0}\cdot 100\% = 9{,}1\% .$$

1.5. Явление электромагнитной индукции

При равномерном изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый проводящий контур, тангенс угла наклона прямой $\Phi(t)$ к оси t равен скорости изменения магнитного потока (рис. 1.36, а), т.е. модулю ЭДС. Изменение магнитного потока имеет наглядный графический смысл. Оно равно площади фигуры, ограниченной кривой зависимости $\varepsilon(t)$, ординатами ε_1, ε_2 и осью t (рис. 1.36, б).

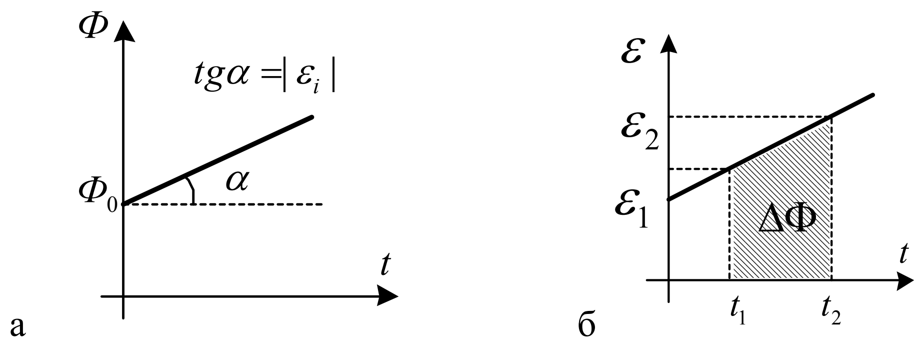


Рис. 1.36

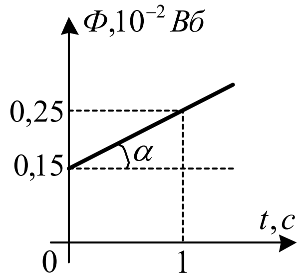
Задача 1.26. Модуль вектора магнитной индукции однородного поля изменяется по закону $B = (0{,}15 + 0{,}1t)Тл$. Площадь витка $0{,}01м^2$. Найти модуль максимальной ЭДС в контуре.

Решение. Магнитный поток в витке меняется со временем по закону

$$\Phi = B(t)S\cos(\vec{B},\vec{n}) .$$

Так как речь идет о максимальном значении ЭДС, то виток ориентирован таким образом, что

$\left(\widehat{\vec{B},\vec{n}}\right) = 0$, $\Phi = (0{,}15 + 0{,}1t)S$.



Построим график зависимости $\Phi(t)$ (рис. 1.37). Тангенс угла наклона прямой и есть искомая величина:

$\left|\varepsilon_{i\max}\right| = tg\alpha = 0{,}01 \cdot 0{,}1 = 10^{-3}(B)$.

Рис.1.37

Задача 1.27. В контуре, расположенном в магнитном поле, ЭДС индукции при изменении поля изменилась равномерно от 0,01 В до 0,05 В за время 0,1 с. Найти модуль изменения магнитного потока.

Решение. Строим график зависимости $\varepsilon(t)$ (рис. 1.38). Модуль изменения магнитного потока определяется площадью заштрихованной трапеции:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2}(1+5)\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}1 = 3\cdot 10^{-3}(B\delta).$$

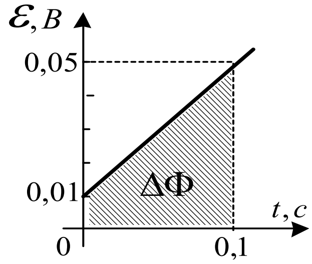


Рис.1.38

Задача 1.28. Сила тока в контуре меняется по закону $I = (25 + 40t)A$. Индуктивность контура равна 8 мГн. Найти ЭДС самоиндукции.

Решение. Магнитный поток, пронизывающий контур, равен

$\Phi = LI = 25L + 40Lt$.

Строим график зависимости $\Phi(t)$ (рис. 1.39):

$\Phi(t) = 0{,}20 + 0{,}32t$.

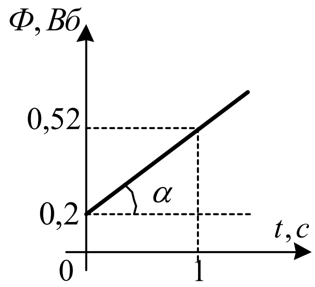


Рис.1.39

Тангенс угла наклона прямой и есть искомая величина

$\left|\varepsilon_S\right| = tg\alpha = 0{,}32(B)$.

Задача 1.29. При деформации катушки ее индуктивность изменяется по закону $L = 0{,}1 + 0{,}04t$ Гн, где t - время в секундах. Определить модуль ЭДС самоиндукции, если по катушке протекает постоянный ток силой 70А.

Решение. Найдем зависимость от времени магнитного потока, пронизывающего катушку:

$\Phi(t) = L(t)I = 0{,}1I + 0{,}04It = 7{,}0 + 2{,}8t$.

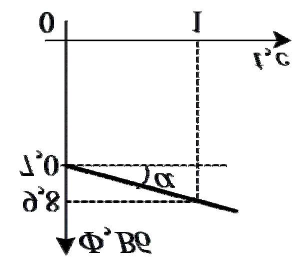


Рис. 1.40

Построим график зависимости $\Phi(t)$ (рис. 1.40). Тангенс угла наклона прямой к оси t равен модулю ЭДС самоиндукции:

$$tg\alpha = |\varepsilon_S| = 2{,}8(B).$$

Задача 1.30. Площадь контура с подвижной перемычкой меняется по закону $S = 0{,}4t$ м, где t - время в секундах. Контур помещен в магнитное поле с индукцией 2 Тл. Угол между вектором магнитной индукции и плоскостью рамки равен 45^o. Найти модуль ЭДС индукции.

Решение. Магнитный поток, пронизывающий контур, изменяется со временем по закону

$$\Phi(t) = BS(t)\cos\alpha = 2\cdot 0{,}4t\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}4\sqrt{2}t.$$

Графически эта зависимость представлена на рис. 1.41. Тангенс угла наклона прямой равен модулю ЭДС индукции:

$$|\varepsilon| = tg\alpha = 0{,}4\sqrt{2}(B).$$

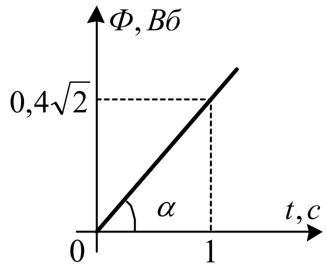


Рис. 1.41

2. Решение задач с помощью векторов

2.1. Кинематика

Кинематические характеристики – перемещение, скорость, ускорение – векторные величины, для которых в случае равнопеременного движения справедливы соотношения

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t.$$

Задача 2.1. На наклонную плоскость с углом наклона α с высоты h вертикально падает шарик и упруго отскакивает. На каком расстоянии от места первого удара он снова ударится о плоскость?

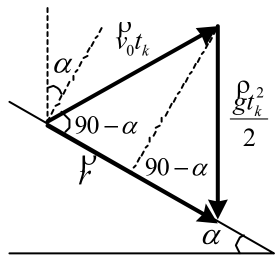


Рис.2.1

Решение. Изобразим на рис 2.1 векторы

$$\vec{v}_0 t_k,\ \frac{\vec{g}t_k^2}{2} \text{ и } \vec{r}$$

для момента второго удара шарика о наклонную плоскость. Эти векторы образуют равнобедренный треугольник, так как углы при основании треугольника равны (см. рис. 2.1). Из равенства боковых сторон треугольника следует

$$v_0 t_k = \frac{gt_k^2}{2},\ t_k = \frac{2v_0}{g}.$$

Основание треугольника – это искомая величина

$$S = |\vec{r}| = 2v_0 t_k\cos(90-\alpha) = 2v_0 t_k\sin\alpha = \frac{4v_0^2}{g}\sin\alpha.$$

Так как
$v_0=\sqrt{2gh}$, то $S=8h\sin\alpha$.

Задача 2.2. С самолета, летевшего горизонтально со скоростью v_0, на высоте h_0 сброшен груз. На какой высоте скорость груза будет направлена под углом α к горизонту?

Решение. Изобразим на рис. 2.2 векторы $\vec r, \vec r_0, \vec v_0\tau, \vec g\tau^2/2, \vec v, \vec v_0, \vec g\tau$ для момента времени, когда скорость груза окажется направленной под углом α к горизонту. При этом учтем, что

$$\vec r=\vec r_0+\vec v_0\tau+\frac{\vec g\tau^2}{2},\quad \vec v=\vec v_0+\vec g\tau .$$

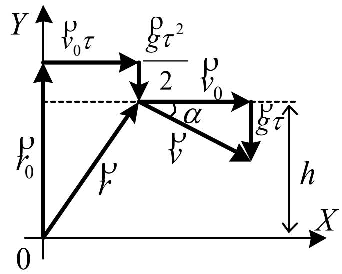


Рис.2.2

Векторы $\vec v, \vec v_0, \vec g\tau$ образуют прямоугольный треугольник, из которого находим τ:

$$g\tau=v_0 tg\alpha,\quad \tau=\frac{v_0}{g}tg\alpha .$$

Рассмотрев трапецию, образованную векторами $\vec r, \vec r_0, \vec v_0\tau$ и $0{,}5\vec g\tau^2$, определяем искомую высоту h:

$$h=|\vec r_0|-\frac{g\tau^2}{2}=h_0=\frac{v_0^2}{2g}tg^2\alpha .$$

Задача 2.3. Самолет летит на высоте h с постоянной скоростью $\vec v_0$. По самолету производят выстрел из орудия в тот момент, когда он находится точно над орудием. Снаряд поразил цель через τ секунд. Найти скорость вылета снаряда v_{0C}.

Решение. Движение самолета и снаряда описывается соответственно законами

$$\vec r=\vec r_0+\vec v_0 t,\quad \vec r_C=\vec v_{0C}t+\frac{\vec g t^2}{2}.$$

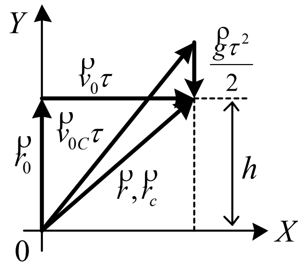


Рис. 2.3

Изобразим на рис. 2.3. векторы $\vec r, \vec r_0, \vec v_0\tau$ и $\vec r_C, \vec v_{0C}\tau, 0{,}5\vec g\tau^2$ для момента поражения цели. Рассмотрев большой прямоугольный треугольник, можем записать

$$(v_0\tau)^2+(h+\frac{g\tau^2}{2})^2=v_{0C}^2\tau^2 .$$

Искомая величина равна

$$v_{0C}=\sqrt{v_0^2+\frac{(2h+g\tau^2)^2}{4\tau^2}} .$$

Задача 2.4. Мотоцикл въезжает на высокий берег рва, параметры которого указаны на рис. 2.4. Какую минимальную скорость v_0 должен иметь мотоциклист в момент отрыва от берега, чтобы пересечь ров?

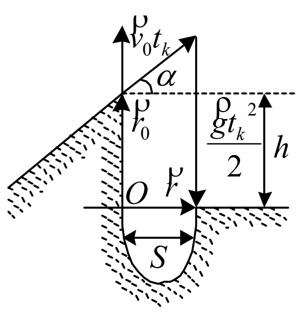


Рис. 2.4

Решение. Движение мотоцикла описывается законом

$$\vec r = \vec r_0 + \vec v_0 t + \frac{\vec g t^2}{2}.$$

На рис. 2.4. изобразим векторы $\vec r, \vec r_0, \vec v_0 t_k$, $0{,}5\vec g t_k^2$ для момента приземления. Рассматривая прямоугольный треугольник на рис. 2.4, можем записать

$$S = |\vec r| = v_0 t_k \cos\alpha,$$

$$\frac{g t_k^2}{2} - h_0 = v_0 t_k \sin\alpha.$$

Полученная система состоит из двух уравнений с двумя неизвестными t_k и v_0.

Решаем систему и находим искомую величину

$$v_0 = \frac{S\sqrt{g}}{\cos\alpha\sqrt{2(S\cdot tg\alpha + h_0)}}.$$

Задача 2.5. Баскетболист бросает в прыжке мяч в кольцо. Скорость мяча сразу после броска v_0 направлена под углом α к горизонту. С какой по модулю скоростью мяч попал в кольцо, если он долетел до него за время τ. Сопротивлением воздуха пренебречь.

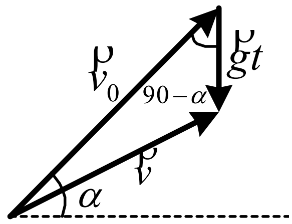


Рис.2.5

Решение. Скорость мяча меняется по закону

$$\vec v = \vec v_0 + \vec g t.$$

Изобразим на рис. 2.5 векторы $\vec v, \vec v_0, \vec g\tau$ в момент попадания мяча в кольцо. Используя теорему косинусов для образованного векторами треугольника, находим искомую скорость:

$$v^2 = v_0^2 + g^2\tau^2 - 2g\tau v_0 \cos(90-\alpha),$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2\tau^2 - 2g\tau v_0 \sin\alpha}.$$

2.2. Силы

Сила – векторная величина, являющаяся мерой взаимодействия тел и определяющая величину и направление вектора ускорения. Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec a = \vec F.$$

Задача 2.6. Угол между векторами ускорения тела массой 100 г и силой тяжести равен 90^o. Ускорение тела равно $10\,м/с^2$. Найти величину суммы всех сил, действующих на тело, исключая силу тяжести.

Решение. Запишем второй закон Ньютона:

$$m\vec a = m\vec g + \vec f,\ \vec f = \sum_i \vec F_i,$$

где $\vec{f}$ - равнодействующая всех сил, за исключением силы тяжести. Построим векторы $\vec{f}, m\vec{a}, -m\vec{g}$ из одной точки с учетом правила сложения векторов

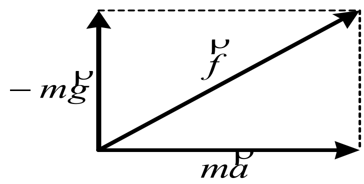
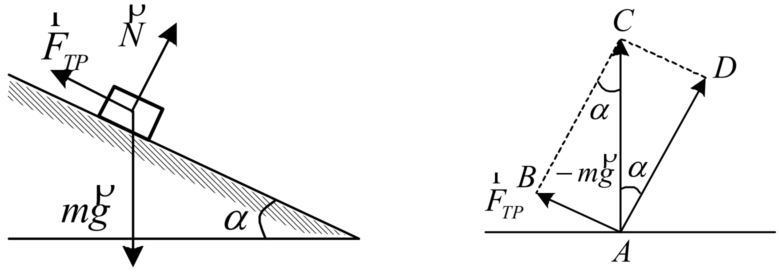


Рис. 2.6

(рис. 2.6). Искомая величина равна гипотенузе прямоугольного треугольника. Следовательно,

$$\left|\vec{f}\right| = m\sqrt{a^2 + g^2} = 0{,}1\sqrt{100 + 100} = \sqrt{2}(H).$$



а б

Рис. 2.7

Задача 2.7. Тело массой 1 кг лежит на наклонной плоскости с углом наклона, равным 30^0. Найти силу трения покоя. $g = 10 м/с^2$.

Решение. Сделаем рисунок и укажем все силы, действующие на тело (рис. 2.7, а). Так как тело покоится, то $a = 0$. Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{0} = \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g}.$$

Построим векторы $\vec{N}, \vec{F}_{тр}, -m\vec{g}$ (рис. 2.7, б) из одной точки, с учетом того, что

$$-m\vec{g} = \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Рассмотрим образовавшийся прямоугольный треугольник ABC. Из этого треугольника находим

$$F_{тр} = mg\sin\alpha = 1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} 5(H).$$

Задача 2.8. Маленький заряженный шарик массой 30 г подвешен на нити в однородном электрическом поле с напряженностью $1000\, В/м$, направленной горизонтально. Найти модуль натяжения нити, если заряд шарика равен 400 мкКл, $g = 10 м/с^2$.

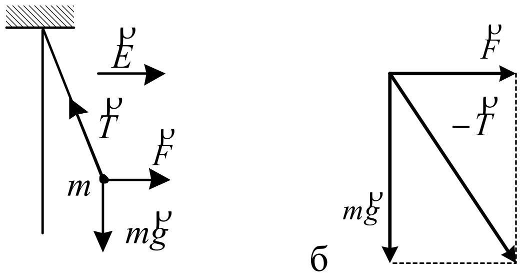
Решение. На рис. 2.8, а изобразим все силы, действующие на шарик. Так как шарик неподвижен, то $a = 0$.

$$0 = \vec{T} + \vec{F} + m\vec{g}.$$

Построим векторы $\vec{F}, m\vec{g}, -\vec{T}$ из одной точки (рис. 2.8, б), учитывая, что $-\vec{T} = \vec{F} + m\vec{g}$.

Из образовавшегося прямоугольного треугольника по теореме Пифагора находим искомую величину:

$$T = \sqrt{F^2 + (mg)^2} = \sqrt{(qE)^2 + (mg)^2} = \sqrt{(0{,}4)^2 + (0{,}3)^2} = 0{,}5(H).$$

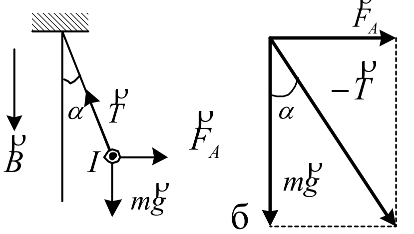


а б

Рис. 2.8

Задача 2.9. Прямолинейный проводник висит горизонтально на двух нитях в вертикальном магнитном поле с индукцией 1 Тл. Длина проводника 1 м, масса 0,2 кг. На какой угол отклонятся нити от вертикали, если по проводнику пустить ток 2 А, $g = 10\,\text{м/с}^2$.

Решение. Запишем условие равновесия проводника (рис. 2.9, а):



а б

Рис. 2.9

$$0 = \vec{T} + \vec{F}_A + m\vec{g}.$$

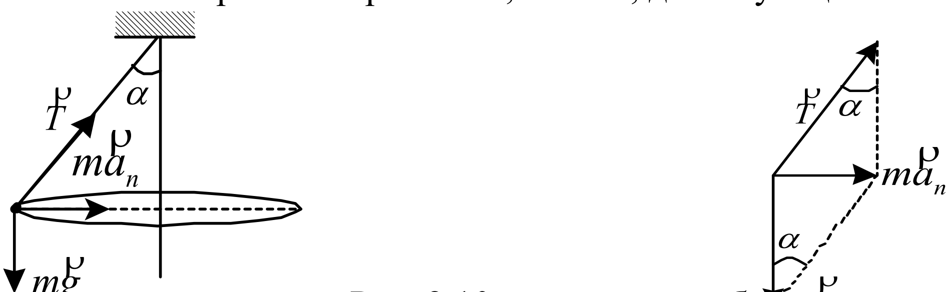
Построим векторы $-\vec{T}, m\vec{g}, \vec{F}_A$ из одной точки (рис. 2.9, б), учитывая, что $-\vec{T} = \vec{F}_A + m\vec{g}$.

Из рис. 2.9, б следует, что

$$tg\alpha = \frac{F_A}{mg} = \frac{IlB}{mg} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{0{,}2 \cdot 10} = 1, \alpha = 45^0.$$

Задача 2.10. Шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, описывает в горизонтальной плоскости окружность, при этом нить отклоняется от вертикали на угол α. Найти скорость вращения шарика (рис.2.10, а).

Решение. Изобразим на рис. 2.10, а силы, действующие на шарик.



а Рис. 2.10 б

Запишем второй закон Ньютона:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$.

Результирующая сил $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ является центростремительной силой и сообщает шарику центростремительное ускорение, равное
$a_n = \dfrac{v^2}{R}$.

Построим векторы $m\vec{g}, \vec{T}, m\vec{a}_n$ из одной точки с учетом правила сложения векторов. Из рис. 2.10, б следует, что
$tg\alpha = \dfrac{ma_n}{mg} = \dfrac{v^2}{gR}$.

Находим искомую величину
$v = \sqrt{gR \cdot tg\alpha}$.

2.3. Импульс

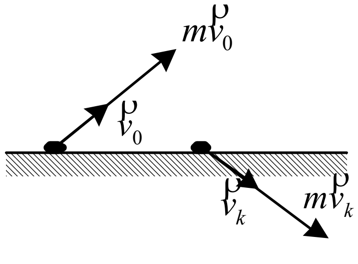
Импульс – векторная величина, изменение которой в течение промежутка времени Δt равно импульсу силы, действующей на тело (систему) в течение этого промежутка:
$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t$, $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p}$.

Задача 2.11. Тело, брошенное с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, через некоторое время упало на землю. Найти изменение импульса за время движения. Силой сопротивления воздуха пренебречь.

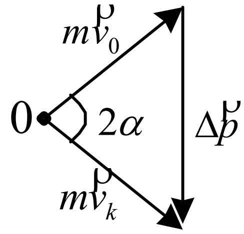
Решение. В соответствии с законом сохранения энергии тело упадет на землю с той же по величине скоростью, составляющей с горизонтом угол α (рис. 2.11, а). Запишем изменение импульса:
$m\vec{v}_k - m\vec{v}_0 = \Delta\vec{p}$.

Перенесем векторы $\vec{p}_k, \vec{p}_0$, изображенные на рис. 2.11, а, в одну точку параллельно самим себе. Вектор $\Delta\vec{p}$ равен разности векторов $m\vec{v}_k$ и $m\vec{v}_0$ (рис. 2.11, б). Образовавшийся треугольник является равнобедренным. С помощью теоремы косинусов находим искомую величину:
$\Delta p = \sqrt{(mv_k)^2 + (mv_0)^2 - 2mv_k \cdot mv_0 \cos 2\alpha}$.

Так как $v_k = v_0$, то
$\Delta p = \sqrt{2m^2v_0^2 - 2m^2v_0^2 \cos 2\alpha} = 2mv_0 \sin\alpha$.



а



б

Рис. 2.11

Задача 2.12. Шарик массой m и начальной скоростью v_0 налетает на стенку под углом α к ней и упруго отскакивает. Время соударения со стенкой Δt. Найти силу, с которой стенка действует на шарик.

Решение. Запишем закон изменения импульса шарика:

$$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t.$$

Построим векторы, изображенные на рис. 2.12, а, путем параллельного переноса из одной точки (рис. 2.12,б). Вектор $\vec{F}\Delta t$ является разностью векторов $m\vec{v}_k$ и $m\vec{v}_0$.

а б

Рис.2.12

Из треугольника по теореме косинусов находим

$$F\Delta t = \sqrt{(mv_k)^2 + (mv_0)^2 - 2m^2 v_k v_0 \cos 2\alpha} = 2mv_0 \sin\alpha,$$

так как $v_k = v_0$.

Следовательно,

$$F = \frac{2mv_0 \sin\alpha}{\Delta t}.$$

Задача 2.13. α-частица влетает в однородное электрическое поле с напряженностью E. Начальная скорость частицы v_0 направлена под углом α к линиям напряженности поля. Под каким углом к линиям напряженности и с какой скоростью она будет лететь через Δt?

Решение. Запишем закон изменения импульса частицы:

$$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t,\ m\vec{v}_k - m\vec{v}_0 = q\vec{E}\Delta t.$$

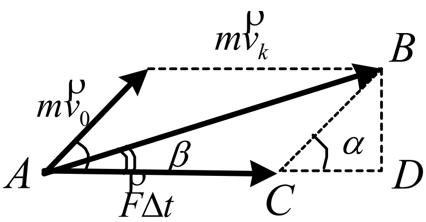


Рис.2.13

Построим векторы $m\vec{v}_k, m\vec{v}_0, q\vec{E}\Delta t$ из одной точки (рис. 2.13). Вектор mv_k равен сумме векторов $m\vec{v}_0$ и $q\vec{E}\Delta t$.

Рассмотрим треугольник ABC и по теореме косинусов определим

$$mv_k = \sqrt{(mv_0)^2 + (qE\Delta t)^2 - 2mv_0 qE\Delta t \cos(180 - \alpha)};$$

$$v_k = \frac{1}{m}\sqrt{m^2 v_0^2 + q^2 E^2 \Delta t^2 + 2mv_0 q\Delta t E \cos\alpha}.$$

Искомый угол β найдем из прямоугольного треугольника ABD:

$$tg\beta = \frac{mv_0 \sin\alpha}{qE\Delta t + mv_0 \cos\alpha}.$$

Задача 2.14. Камень брошен под углом 30^0 градусов к горизонту с начальной скоростью 10 м/с. Найти время движения камня до падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать. $g = 10 м/c^2$.

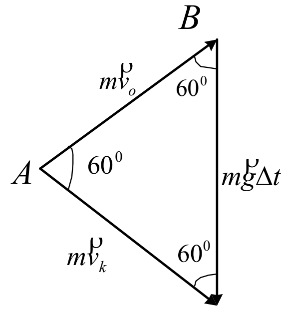


Рис. 2.14

Решение. Запишем закон изменения импульса камня
$\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t$.

Изменение импульса камня происходит под действием силы тяжести:
$m\vec{v}_k - m\vec{v}_0 = m\vec{g}\Delta t$.

В соответствии с законом сохранения энергии камень упадет на землю со скоростью, равной по величине начальной:

$v_k = v_0$, $(\frac{mv_k^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2})$.

Направление конечной скорости будет составлять с горизонтом тот же угол (рис. 2.11), так как $v_{0x} = const, v_{0y} = v_{ky}$.

Построим векторы $m\vec{v}_0, m\vec{v}_r, m\vec{g}\Delta t$ из одной точки путем параллельного переноса. Вектор $m\vec{g}\Delta t$ равен разности векторов $m\vec{v}_k$ и $m\vec{v}_0$ (рис. 2.14). Треугольник АВС является равносторонним, следовательно,
$m\vec{g}\Delta t = mv_0$.

Отсюда

$$\Delta t = \frac{v_0}{g} = 1(c).$$

Задача 2.15. Снаряд, летевший со скоростью v_0 под углом α к горизонту, разрывается на два осколка, массы которых равны $0,4m_0$ и $0,6m_0$. Скорость меньшего осколка оказалась направленной по вертикали и равной v_1. Скорость второго составила угол β с первоначальной скоростью снаряда. Найти величину скорости второго осколка.

Решение. Запишем закон изменения импульса системы $\vec{p}_k - \vec{p}_0 = \vec{F}\Delta t; \vec{p}_k = 0,4m_0\vec{v}_1 + 0,6m_0\vec{v}_2; \vec{p}_0 = m_0\vec{v}_0$.
Так как время разрыва мало, то можно пренебречь импульсом силы тяжести:

$\vec{F}\Delta t = m_0\vec{g}\Delta t = 0$.

Тогда

$0,4m_0\vec{v}_1 + 0,6m_0\vec{v}_2 - m_0\vec{v}_0 = 0$.

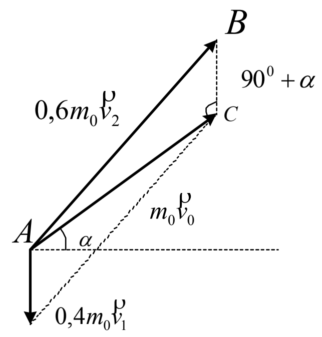


Рис.2.15

Построим векторы $0,4m_0\vec{v}_1; 0,6m_0\vec{v}_2; m_0\vec{v}_2$ из одной точки (рис. 2.15). Из треугольника АВС по теореме косинусов находим

$$0,6m_0v_2 = \sqrt{m_0^2v_0^2 + 0,16m_0^2v_1^2 - 2m_0^2v_0 \cdot 0,4v_1\cos(90+\alpha)},$$

$$v_2 = \frac{5}{3}\sqrt{v_0^2 + 0,16v_1^2 + 0,8v_1v_0\sin\alpha}.$$

3. Электрические цепи. Правила Кирхгофа

Расчет силы тока и падения напряжения на отдельных участках простых электрических цепей не вызывает, как правило, затруднений. Более сложным является случай разветвленной цепи, когда в точках разветвления сходится три и более проводов. Расчет токов и напряжений в таких цепях значительно упрощается с помощью правил Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа: алгебраическая сумма сил токов в участках цепи, сходящихся в любой точке разветвления, равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0 .$$

Ток берется со знаком «+», если он входит в узел, и со знаком «-», если выходит из узла. Узлом называют точку разветвления.

Второе правило Кирхгофа: сумма падений напряжений на участках любого замкнутого контура равна сумме действующих в этом контуре ЭДС:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_k \varepsilon_k .$$

ЭДС берется со знаком «+», если направление обхода по контуру совпадает с направлением действия ЭДС.

Задача 3.1. Найти показания амперметра в схеме, изображенной на рис. 3.1.

$\varepsilon = 5\,B, R_1 = 2\,Ом, R_2 = 4\,Ом, R_3 = 6\,Ом$.

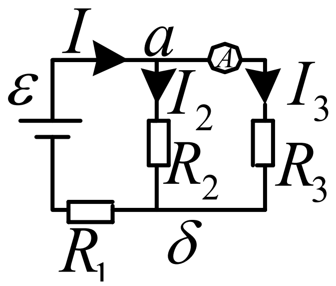


Рис.3.1

Решение. Выберем положительные направления токов так, как показано на рис. 3.1. Тогда первое правило Кирхгофа для точки a дает

$I - I_2 - I_3 = 0$, $I = I_2 + I_3$.

Применяя второе правило для контуров aR_2bR_1a и aR_3bR_2a и обходя их по часовой стрелке, имеем

$I_2R_2 + IR_1 = \varepsilon$, $I_3R_3 - I_2R_2 = 0$.

Получили три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} I = I_2 + I_3, \\ \varepsilon = I_2R_2 + IR_1, \\ 0 = I_2R_3 - I_2R_2. \end{cases}$$

Выразим токи I и I_2 через ток I_3:

$$I_2 = \frac{R_3}{R_2} I_3 , \; I = (\frac{R_3}{R_2} + 1) I_3 .$$

Подставим во второе уравнение системы

$$\varepsilon = R_3 I_3 + (\frac{R_3}{R_2} + 1) R_1 I_3 .$$

Отсюда

$$I_3 = \frac{\varepsilon R_2}{R_3R_2 + R_3R_1 + R_2R_1} = \frac{5}{11} (A) .$$

Через амперметр идет такой же ток, что и через сопротивление R_3.

Задача 3.2. Какова будет разность потенциалов между любыми точками цепи, изображенной на рис. 3.2: ЭДС каждого элемента ε, внутреннее сопротивление каждого элемента r. Сопротивлением проводов пренебречь.

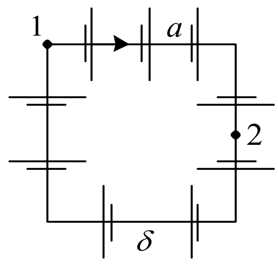


Рис. 3.2

Решение. Применим второе правило Кирхгофа, обойдя контур по часовой стрелке. Падение напряжения происходит на внутреннем сопротивлении каждого источника тока. Если в контуре n ЭДС, то $nIr = n\varepsilon$, следовательно,

$$I = \frac{\varepsilon}{r}.$$

Пусть между точками 1 и 2 на участке $1a2$ содержится k ЭДС. Мысленно подсоединим к этим точкам вольтметр с большим внутренним сопротивлением и применим второе правило Кирхгофа к любому образовавшемуся замкнутому контуру. Тогда, например, для контура $1a21$ получим

$$U + kIr = k\varepsilon,$$

где U - падение напряжения на вольтметре, т.е. разность потенциалов между точками 1 и 2.

Окончательно

$$U = k\varepsilon - kIr = k\varepsilon - k\frac{\varepsilon}{r}r = 0.$$

Задача 3.3. Два элемента с ЭДС, равными $\varepsilon_1 = 1{,}5B$ и $\varepsilon_2 = 2B$, соединены одинаковыми полюсами. Вольтметр, подключенный к клеммам батареи, показал напряжение $U = 1{,}7B$. Определить отношение внутренних сопротивлений. Током вольтметра пренебречь.

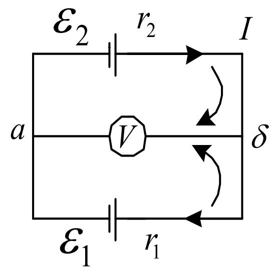


Рис.3.3

Решение. Начертим схему и выберем положительные направления токов. Применим второе правило Кирхгофа к контурам ar_2ba и ar_1ba, обойдя их в направлениях, указанных стрелками на рис. 3.3. Получим

$$Ir_2 + U = \varepsilon_2, U - Ir_1 = \varepsilon_1.$$

Запишем эти уравнения в виде

$$Ir_2 = \varepsilon_2 - U, Ir_1 = U - \varepsilon_1.$$

Разделив одно уравнение на другое, находим искомую величину

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\varepsilon_2 - U}{U - \varepsilon_1} = \frac{3}{2}.$$

Задача 3.4. Батарея состоит из $n = 8$ элементов, соединенных последовательно. ЭДС каждого элемента $\varepsilon_0 = 1{,}5B$, внутреннее сопротивление $r_0 = 0{,}25Ом$. Внешняя цепь представляет соединенные параллельно два проводника сопротивлениями $R_1 = 10Ом$ и $R_2 = 50Ом$. Определить напряжение на зажимах батареи.

Решение. Начертим схему (рис. 3.4) и заменим ее эквивалентной (рис. 3.5) с сопротивлением

$R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \dfrac{25}{3}(Ом)$.

Выберем положительное направление тока, как показано на рис. 3.5, и обойдем контур по часовой стрелке.

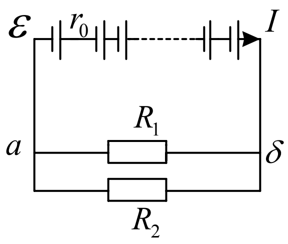


Рис. 3.4

Согласно второму правилу Кирхгофа
$nIr_0 = IR = n\varepsilon$.

Находим силу тока в цепи:

$I = \dfrac{n\varepsilon}{nr_0 + R}$.

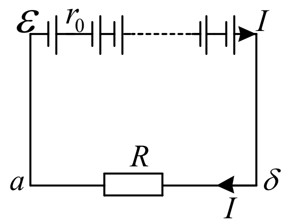


Рис. 3.5

Напряжение на зажимах батареи равно падению напряжения на внешнем сопротивлении R. Следовательно,

$U = IR = \dfrac{n\varepsilon R}{nr_0 + R} = 9{,}7(B)$.

Задача 3.5. В цепь включены одинаковыми полюсами два гальванических элемента с разными ЭДС: $\varepsilon_1 = 1{,}9\ В$ и $\varepsilon_2 = 1{,}1\ В$ и с внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1\ Ом$ и $r_2 = 0{,}8\ Ом$. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10\ Ом$ (рис. 3.5). Чему равны токи I_1 и I_2, проходящие через элементы?

Решение. Выберем положительные направления токов так, как указано на рис. 3.6. Применим первое правило Кирхгофа к точке b:

$I_1 - I_2 - I = 0$.

Второе правило Кирхгофа применим к контурам ar_1br_2a и ar_1bRa, обойдя их в направлениях, указанных на рис. 3.6:

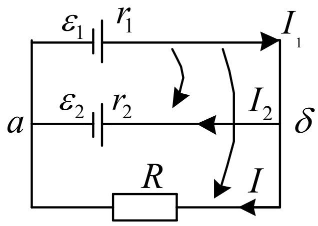


Рис. 3.6

$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $I_1 r_1 + Ir = \varepsilon_1$.

Получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I = 0, \\ I_1 r_1 - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \\ I_1 r_1 - Ir = \varepsilon_1. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем искомые токи:

$$I = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{R} + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{r_2}}{I + \dfrac{r_1}{R} + \dfrac{r_1}{r_2}} \approx 1{,}05(A),\quad I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - I_1 r_1}{r_2} \approx 0{,}87(A).$$

Св. план 2004, поз. 140

Учебное издание

Сергеева-Некрасова Марина Сергеевна,
Смирнова Галина Федоровна

Задачи по физике и методики их решения

Редактор Е.Н. Батурчик

Подписано в печать 30.12.2003.	Формат 60x84 1/16.	Бумага офсетная.
Печать ризографическая.	Гарнитура «Таймс».	Усл. печ.л.2,1.
Уч.-изд.л. 1,7.	Тираж 100 экз.	Заказ 520.

Издатель и полиграфическое исполнение:
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики
и радиоэлектроники»
Лицензия ЛП № 156 от 30.12.2002
Лицензия ЛП № 509 от 03.08.2001
220013, Минск, П.Бровки,6